

5. Übung zur Elementaren Stochastik

Prof. Dr. Ehrhard Behrends, WS 2009/10

Ausgabe: 9. 11. 2009

Abgabe: am 17. 11. 2009 bis 16.00 Uhr in den Fächern der Tutoren

Bei einigen Aufgaben gibt es eine *-Version. Die ist für die ambitionierteren Übungsteilnehmer gedacht. Das gilt auch für die **-Aufgaben, bei denen wird unter den richtigen Lösungen auch ein Preis verlost. Bitte für jedes n auf dem gleichen Zettel höchstens eine der Aufgaben n , n^* , n^{**} bearbeiten, $n = 1, 2, 3, 4$!

1. Zur Erinnerung: Ist X eine reellwertige Zufallsvariable, so versteht man unter der *Verteilungsfunktion* die Funktion

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathbb{P}(\{X \leq x\}).$$

$\Omega = \{1, \dots, 10\}$ sei mit der Gleichverteilung versehen, und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $X(\omega) := (-1)^\omega \omega^2$ definiert. Skizzieren Sie F_X .

Weiter sei $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch $Y(\omega) :=$ „Anzahl der Teiler von ω “ erklärt. Skizzieren Sie auch F_Y .

1*. Es sei $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ stetig differenzierbar, (nicht notwendig streng) monoton steigend, und es gebe reelle Zahlen a, b mit $F(a) = 0$ und $F(b) = 1$. Man zeige, dass es dann eine reellwertige Zufallsvariable X mit $F = F_X$ gibt.

(Tipp: Als Wahrscheinlichkeitsraum bietet sich $[a, b]$ mit einer geeigneten Dichtefunktion an.)

2. a) $[0, 1]$ soll mit der Dichte $f(x) := 2 - 2x$ versehen sein. Berechnen Sie $E(X)$ und $\sigma(X)$ für die Zufallsvariable $X(x) := x$.

b) Bestimmen Sie die Varianz der Poissonverteilung. (Genauer: Man betrachtet $\mathbb{N}_0$ mit der Poissonverteilung zum Parameter λ und darauf die Zufallsvariable $X : x \mapsto x$. Gefragt ist nach $\sigma^2(X)$.)

3. a) Das Stochastikseminar ist zu Ende, vor dem Seminarraum trifft der Professor einen Kollegen. „Wie viele Teilnehmer hat denn Ihr Seminar?“ Antwort: „Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei am gleichen Tag Geburtstag haben, ist etwa 9.462 Prozent.“ Was lässt sich daraus für die Anzahl der Teilnehmer schließen?

b) In Berlin bestehen die Autokennzeichen aus Buchstaben und einer vierstelligen Zahl. Wir wollen annehmen, dass dabei alle vierstelligen Zahlen gleichwahrscheinlich sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem Kennzeichen des nächsten vorbeikommenden PKW zwei Ziffern übereinstimmen?

4. Die neue Regierung möchte ein neues Lotto einführen: „acht aus n “, wo $n > 8$. Wie groß muss man n mindestens wählen, damit die Wahrscheinlichkeit für „6 Richtige“ höchstens ein Promille ist?

Freiwilliger Zusatz: Im italienischen Lotto spielt man „6 aus 90“. Errechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Hauptgewinn (sechs Richtige) und finden Sie eine originelle Veranschaulichung dieser winzigen Wahrscheinlichkeit (so etwas wie die Illustration mit den Telefonnummern bei „unserem“ Lotto). Für die originellste Lösung gibt es einen kleinen Sonderpreis.

4.** Wie wahrscheinlich ist es, dass beim (deutschen) Lotto mindestens ein Zahlenpaar ausgespielt wird? (Unter einem Zahlenpaar wollen wir benachbarte Zahlen verstehen, wie z.B. 21, 22 bei der Ausspielung 12, 15, 21, 22, 44, 49.)

Tipp: K5

Homepage der Veranstaltung: page.mi.fu-berlin.de/behrends/stochastik2009

Für den mathematischen „Arbeitsspeicher“ ...

Auf die folgenden Fragen sollte man jederzeit eine richtige Antwort geben können.

Was ist eine σ -Algebra? Wie ist die σ -Algebra der Borelmengen definiert? Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum? Wie kann man einen Wahrscheinlichkeitsraum einfach definieren, wenn Ω höchstens abzählbar ist? Was versteht man unter a) der Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$, b) einem Laplaceraum, c) der Bernoulli-Verteilung, e) der Poisson-Verteilung, f) der geometrischen Verteilung? Wie kann man auf einem Intervall, versehen mit der σ -Algebra der Borelmengen, einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Hilfe einer Dichtefunktion definieren? Was versteht man unter a) Gleichverteilung, b) Exponentialverteilung, c) Normalverteilung? Was wird mit dem Buffonschen Nadel-Experiment approximativ berechnet? Was ist eine Zufallsvariable? Wie ist der durch eine Zufallsvariable induzierte Wahrscheinlichkeitsraum definiert? Wie ist der Erwartungswert einer Zufallsvariablen im Fall diskreter Räume und bei Räumen mit Dichte definiert? Was sind Varianz und Streuung? **Neu:** Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n -elementigen Menge auszuwählen? In welchen Fällen verwendet man die hypergeometrische Verteilung? Was ist eine maximum-likelihood-Schätzung?

... und hier noch Beispiele aus den „Arbeitsspeichern“ anderer Teilbereiche der Mathematik:

Ist $\mathcal{E}$ ein Mengensystem, d.h. eine Teilmenge der Potenzmenge einer Menge M , wie ist dann $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ definiert? Und wie $\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$? Was ist eine offene, was eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$? Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung? Was ist eine stetige Funktion? Was versteht man unter dem Zwischenwertsatz? Was ist $f^{-1}(A)$, wie ist die inverse Abbildung f^{-1} definiert (falls sie existiert)? Was heißt Konvergenz für Folgen und Reihen. Was ist eine absolut konvergente Reihe? Warum ist dieser Begriff für die Stochastik wichtig? **Neu:**

Stochastik am Computer: Anregungen

Viele Definitionen, Ergebnisse und Verfahren sind besser zu verstehen, wenn man zur Illustration Computersimulationen zur Verfügung hat. Es wird empfohlen, sich solche Simulationen selbst zu schreiben, viele Routinen findet man schon vorgefertigt in den meisten Programmpaketen.

Unterprogramme: Zufallszahlen erzeugen können (Laplace, Binomial, Poisson, geometrisch, Exponentialverteilung, Normalverteilung, ...); Häufigkeitsverteilungen skizzieren können (so genannte Histogramme).

Neu: Monte-Carlo-Verfahren zur approximativen Integration.

Projekte: Test des Zufallszahlengenerators (etwa einige Millionen gleichverteilte Zufallszahlen in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ erzeugen und prüfen, ob alle Ergebnisse in etwa gleich oft vorkommen); einige Millionen Poissonverteilte Zufallszahlen erzeugen und ein Histogramm erstellen, ... **Neu:** Integrale ausrechnen mit Monte-Carlo-Verfahren und Güte-Test durch Vergleich mit dem exakten Ergebnis;